Geometría Analítica del Espacio
Tarea 2

Prof. Mauricio Medina

1. Para una matriz $A = (a_{ij})$ de 3×3 demuestre lo siguiente:

   a) El determinante de A por menores respecto a la segunda columna es igual al determinante de A por menores respecto al tercer renglón.

   b) El determinante de A por menores respecto a la primer columna es igual al determinante de A por menores respecto al segundo renglón.

   c) Si A tiene un reglón que consta solo de ceros, entonces $|A| = 0$.

   d) Si A tiene una columna que consta solo de ceros, entonces $|A| = 0$.

   e) Sea B la matriz que surge de intercambiar dos columnas de A. Entonces $|B| = -|A|$.

   f) Sea B la matriz que surge de intercambiar dos renglones de A. Entonces $|B| = -|A|$.

2. Calcule el producto vectorial $\overline{u}\times\overline{v}$ para los siguientes vectores y compruebe que $\overline{u} \times \overline{v}$ es ortogonal a $\overline{u}$ y a $\overline{v}$.

   a) $\overline{u} = (1, 2, 3)$, $\overline{v} = (2, 1, -2)$.

   b) $\overline{u} = (3, 2, -1)$, $\overline{v} = (0, 5, 1)$.

   c) $\overline{u} = (2, 0, 3)$, $\overline{v} = (-1, 2, 2)$.

   d) $\overline{u} = (3, 1, -2)$, $\overline{v} = (-1, -2, -3)$.

   e) $\overline{u} = (3, 5, -3)$, $\overline{v} = (4, -1, 3)$.

   f) $\overline{u} = (-2, -3, -1)$, $\overline{v} = (-2, 1, 7)$.

3. Demuestre que si $\overline{u} = (1, 2, 3)$, $\overline{v} = (2, -1, 4)$ y $\overline{w} = (-1, 2, -3)$ entonces $\overline{u} \times (\overline{v} + \overline{w}) = (\overline{u} \times \overline{v}) + (\overline{u} \times \overline{v})$.

4. Demuestre que si $\overline{u}$ y $\overline{v}$ son vectores en $\mathbb{R}^3$ y $r \in \mathbb{R}$, entonces $r\overline{u} \times \overline{v} = r(\overline{u} \times \overline{v}) = \overline{u} \times r\overline{v}$.

5. Demuestre que para todo $\overline{v}$ en $\mathbb{R}^3$, se tiene que $\overline{v} \times \overline{v} = 0$.

6. Demuestre que $(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) \cdot \mathbf{k} = 1$ y $\mathbf{j} \cdot (\mathbf{i} \times \mathbf{k}) = -1$.

7. Obtenga una ecuación paramétrica vectorial de la recta que pasa por los puntos p y q.

a) $p = (-1, 5, 7)$ y $q = (5 - 3, 1)$.

b) $p = (2, 3, -1)$ y $q = (2, -3, 2)$.

c) $p = (1, -2, -3)$ y $q = (-4, 1, 3)$.

d) $p = (1, 0, 3)$ y $q = (5, 2, -1)$.

8. Encuentra la(s) coordenada(s) del (los) punto(s) que divide(n) al segmento con extremos p y q de la manera que se especifica. (justifique la respuesta)

   a) $p = (-6, 1, 5)$ y $q = (3, 13, -1)$; biseca

   b) $p = (-1, 3, 6)$ y $q = (7, 5, -2)$; triseca.

   c) $p = (-1, 2, 1)$ y $q = (7, 6, -11)$; en cuatro partes iguales.

9. Obtenga las ecuaciones simétricas de las rectas que pasan por:

   a) $p = (-1, 1, -3)$ y con vector de dirección $\overline{v} = (1, 3, 4)$.

   b) $p = (0, 2, -1)$ y con vector de dirección $\overline{v} = (1, 1, 1)$.

   c) $p = (3, -1, 4)$ y $q = (-2, 1, -3)$.

   d) $p = (-4, 1, 3)$ y $q = (5, 3, -4)$.

   e) $p = (1, 4, -2)$ y es paralela a la recta con ecuaciones simétricas:

$$\frac{x+3}{1} = \frac{y+7}{3} = \frac{z-5}{-6}.$$

   f) $p = (-2, -4, -1)$ y es paralela a la recta con ecuaciones simétricas:

$$x + 2 = 3 - y = 4 - z.$$

   g) $p = (-5, 1, 0)$ y es paralela a la recta que pasa por $(5, -1, 4)$ y $(5, 1, 2)$.

   h) $p = (1, 3, 1)$ y es paralela a la recta que pasa por $(4, 7, -6)$ y $(4, 3, -6)$.

10. Obtenga la ecuación cartesiana del plano que pasa por el punto p y tiene vector normal $\overline{n}$.

    a) $p = (1, 2, 3)$, $\overline{n} = (2, 3, -1)$.

    b) $p = (-1, -1, -1)$, $\overline{n} = (-1, 3, 5)$.

    c) $p = (2, -1, 0)$, $\overline{n} = (1, 0, 0)$.

11. Obtenga la ecuación cartesiana que pasa por los puntos p, q y s.

    a) $p = (3, 4, 1)$, $q = (-1, -2, 4)$ y $s = (3, 2, 4)$.

    b) $p = (3, 1, 4)$, $q = (-1, -2, 5)$ y $s = (4, 2, 1)$.

    c) $p = (4, 2, 1)$, $q = (1, 3, 2)$ y $s = (1, 2, 3)$.

12. Obtenga las ecuaciones simétricas de la recta que pasa por p y es perpendicular al plano dado.

a) $p = (1, -1, 2)$; $4x - 3y + 2z - 7 = 0$.

b) $p = (1, -3, 4)$; $x - 3y + 2z = 4$.

c) $p = (3, -1, 4)$; $2x + 2y - z = 4$.

13. Obtenga una ecuación del plano que contiene al punto $p = (2, -3, -1)$ y también a la recta dada por las ecuaciones simétricas

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{5} = \frac{z-3}{2}.$$

14. Obtenga una ecuación del plano que contiene al punto $p = (3, -2, 1)$ y también a la recta dada por las ecuaciones simétricas

$$\frac{x+2}{1} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z}{6}.$$

15. Obtenga la ecuación cartesiana y las ecuaciones simétricas de la recta de intersección de los siguientes planos:

a) $3x + y - z - 6 = 0$ y $4x - 2y - 3z + 2 = 0$.

b) $2x - 3y + z - 5 = 0$ y $2x - y + 8z - 3 = 0$.

c) $x + y + 3z - 1 = 0$ y $2x - 3y + z - 7 = 0$.

d) $2x + 3y - 2z + 2 = 0$ y $3x - y + 3z - 19 = 0$.

Sean $\overline{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\overline{v} = (v_1, v_2, v_3)$ y $\overline{w} = (w_1, w_2, w_3)$ tres vectores en $\mathbb{R}^3$ y considere el determinante

$$D = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

Entonces D satisface

$$D = \overline{u} \cdot (\overline{v} \times \overline{w}) = (\overline{u} \times \overline{v}) \cdot \overline{w} = (\overline{w} \times \overline{u}) \cdot \overline{v}. \tag{1}$$

16. Sean $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ y $\mathcal{P}_3$ planos en $\mathbb{R}^3$ con vectores normales $\mathbf{n}_1 = (a_1, b_1, c_1)$, $\mathbf{n}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ y $\mathbf{n}_3 = (a_3, b_3, c_3)$ respectivamente. Usando la ecuación (1) demuestre que $D = 0$ si y solo si $\mathcal{P}_1$, es paralelo a la recta de intersección de $\mathcal{P}_2$ y $\mathcal{P}_3$, o bien $\mathcal{P}_2$ y $\mathcal{P}_3$ son paralelos entre sí.