Curso de Algebra
Tarea 1

Prof. Mauricio Medina

1. Sean I y J ideales del anillo del anillo R.

   a) Suponga que $I \subseteq J$. Demuestre que $J/I := \{a + I \mid a \in J\}$ es un ideal del anillo cociente R/I.

   b) Sea $f : T \to R$ un morfismo de anillos. Demuestre que $f^{-1}(I)$ es un ideal de T.

   c) Sea $\pi : R \to R/I$ la proyección canónica. Demuestre que las asignaciones

   $$J \longmapsto J/I$$

   $$\pi^{-1}(L) \longleftarrow\!\shortmid L$$

   entre los ideales de R que contienen a I y los ideales de R/I son inversa una de la otra.

2. Sea R un DFU con campo de fracciones Q. Si $f(\alpha) = 0$ con $f \in R[x]$ mónico y $\alpha \in Q$, entonces $\alpha \in R$.

3. Demuestre que el polinomio $x^6 + 5x^2 + x + 1$ es irreducible en $\mathbb{Z}[x]$.

4. Sea K un campo y $g, h \in K[x]$ dos polinomios primos relativos de grado positivo. Sea y otra indeterminada y sea E el campo de fracciones del dominio $K[y]$. Así $K \subseteq K[y] \subseteq E$ y podemos ver $g, h \in E[x]$. Definimos $f(x) \in E[x]$ como $f(x) = g(x) - yh(x)$. Muestre que $f(x)$ es irreducible en $E[x]$.

5. Sean I y J ideales de un anillo R. Demuestre que:

   a) Demuestre que $IJ \subseteq I \cap J$.

   b) $(J : I) = \{r \in R \mid ra \in J \text{ para todo } a \in I\}$.
   Al ideal $(J : I)$ se le llama el trasladado o el que traslada I a J.
   En el caso particular $(0 : I)$ se le llama el anulador de I.

6. Si $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ es mónico y divide a un polinomio mónico $g(x) \in \mathbb{Z}[x]$, entonces $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$.

7. Demuestre que el polinomio $x^5 + 3x + 1$ es irreducible en $\mathbb{Z}[x]$.

8. Sea R un DFU Noetheriano y suponga que para $a, b \in R$ no cero y primos relativos, existen $r, t \in R$ tales que $1 = ra + tb$. Muestre que R es un DIP.

9. Sea R un anillo. Demuestre que R tiene ideales máximos y que todo ideal propio está contenido un ideal máximo.

10. Sea R un DFU con campo de fracciones Q y suponga que $\alpha \in Q$. Pruebe que es posible escribir $\alpha = \frac{a}{b}$ con $a, b \in R$ y tal que $\mathrm{mcd}(a, b) = 1$.

11. Demuestre que el polinomio $x^4 + 3x + 4$ es irreducible en $\mathbb{Z}[x]$.

12. Si p^e es la potencia de un primo, pruebe que $x^{p^e} - 1 = (x^{p^{e-1}} - 1)\varphi(x)$ y usando el criterio de Einsenstein demuestre que $\varphi(x)$ es irreducible.

    Definición: Un anillo R se llama *local* si contiene un único ideal máximo.

13. Sea R un anillo finito.

    a) Si R es un dominio entero, entonces R es campo.

    b) Todo ideal primo de R es máximo.

14. Sean $a, b \in R$ con R un anillo local. Si $a|b$ y $b|a$, entonces existe una unidad $u \in R$ tal que $au = b$.

15. Demuestre que el polinomio $x^4 + x + 1$ es irreducible en $\mathbb{Z}[x]$.

16. Si K es cualquier campo, demuestre que hay un número infinito de polinomios irreducibles en $K[x]$.

    Definición: Un ideal I de un anillo R es *finitamente generado* si existen $a_1, a_2, ..., a_n \in I$ tales que

    $$I = \{r_1 a_1 + \cdots + r_n a_n \mid a_i \in R\}.$$

17. Sea R un anillo. Demuestre que R es Noetheriano si y solo si todo ideal de R es finitamente generado.

18. Sea $\pi \in \mathbb{Z}[i]$ y suponga que $N(\pi) = p \in \mathbb{Z}$ es un primo. Demuestre que π es irreducible en $\mathbb{Z}[i]$.

19. Demuestre que el $x^5 + x^2 + 1$ polinomio es irreducible en $\mathbb{Z}[x]$.

20. Sea R un anillo. Demuestre que $R[x]$ es un DIP si y solo si R es campo.